Itziar Berriozabal. 1

21.05.96

ESTADISTICA I / 1º ESTE

SUPERHIPERIMPORTANTE.

TEMA 7: DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD

(7-1) DISTRIBUCION NORMAL STANDAR : N (0,1)

(7-2) CALCULO DEL AREA BAJO LA CURVA NORMAL: MANEJO DE TABLAS

(7-3) DISTRIBUCION NORMAL GENERAL : N (μ,σ)

(7-4) TIPIFICACION

(7-5) PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCION NORMAL

(7-6) APROXIMACIONES CON LA DISTRIBUCION NORMAL

TEXTO: ESTADISTICA CAPITULO 7

M.R. SPIEGEL

EDIT. McGRAW-HILL

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA:

*ESTADISTICA PARA ADMINISTRACION Y ECONOMIA

M.L. BERENSON / D.M. LEVINE

EDIT. INTERAMERICA

*PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

G.C. CANAVOS

EDIT. McGRAWHILL

ESTADISTICA I / 1º ESTE

EJEMPLOS TEMA7

SUPONIENDO QUE LA DISTRIBUICION SIGUE UNA LEY NORMAL, EFECTUAR LOS EJEMPLOS SIGUIENTES:

EJEMPLO 1 : CALCULAR EL PORCENTAJE QUE QUEDA POR DEBAJO DE UNA PUNTUACION TIPICA DE 1'25.

EJEMPLO 2 : CALCULAR EL PORCENTAJE DE OBSERVACIONES QUE QUEDA POR ENCIMA DE UNA PUNTUACION TIPICA DE 2.

EJEMPLO 3 : CALCULAR EL PORCENTAJE DE INDIVIDUOS QUE HA OBTENIDO UNA PUNTUACION TIPICA COMPRENDIDA ENTRE -0'6 Y 0'75.

EJEMPLO 4 : CALCULAR EL PORCENTAJE DE INDIVIDUOS QUE HA OBTENIDO UNA PUNTUACION INFERIOR A -0'6 Y SUPERIOR A 0'75.

EJEMPLO 5 : DETERMINAR LA PUNTUACION TIPICA QUE NO HA SIDO SUPERADA POR EL 45% DE LOS INDIVIDUOS.

EJEMPLO 6 : DETERMINAR LA PUNTUACION TIPICA QUE HA SIDO SUPERADA POR EL 20% DE LOS INDIVIDUOS.

EJEMPLO 7 : DETERMINAR ENTRE QUE PUNTUACIONES SE ENCUENTRAN LAS OBTENIDAS POR EL 40% CENTRAL DE LOS INDIVIDUOS.

EJEMPLO 8 : DETERMINAR EL Nº DE INDIVIDUOS QUE HA OBTENIDO UNA PUNTUACION SUPERIOR A 100 EN UNA DISTRIBUCION NORMAL CON MEDIA=80 Y DESVIACION TIPICA = 16, SIENDO EL TOTAL DE INDIVIDUOS DE 500.

DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD

1º) Una variable aleatoria X sigue una distribución normal con media cero, y varianza 1. Calcular las probabilidades de los sucesos siguientes :

a) X es inferior a 1

b) X es superior a cero

c) X está comprendido entre 1 y 2

d) X es exterior al intervalo (-2 ; 1)

Amtxu

2º) En un examen de matemáticas la media fue 72 y la desviación tipica 15. ¿ Que puntuación tipificada corresponderia a los estudiantes que obtuvieron puntuaciones de : a) 60 b) 93 y c)72 ? ¿ Que puntuación le corresponderia a los estudiantes que tienen como puntuación tipificada: d) -1 y e) 1'6 ?

Amtxu

3º) A dos estudiantes les dicen que han obtenido puntuaciones tipificadas de 0'8 y 0'4 respectivamente, en un examen de ingles. Si sus puntuaciones fueron de 88 y 64 respectivamente, hallar la media y la desviación tipica de las puntuaciones del examen.

Amtxu

4º) Sabiendo que la distribución de los cocientes intelectuales (CI) de los reclutas de un reemplazo, es una distribución normal de media 0'9 y desviación tipica 0'4. Calcular para un batallón que consta de 1000 reclutas :

Amtxu

a) El número de reclutas con un CI inferior a 1

b) El número de reclutas con un CI superior a 1'4

c) El número de reclutas con un CI comprendido entre 0'8 y 1'3

¿? ⇒ 5º) Determinar el valor o los valores de Z en cada uno de los siguientes casos, donde el area dada se refiere a una curva Normal de media 0 y varianza 1:

a) El area entre o y z es 0'3770

b) El area a la izquierda de z es 0'8621

c) El area entre 1'5 y z es 0'0217

6º) Una maquina produce recipientes cuyas capacidades estan distribuidas normalmente con media 10 y desviación tipica 0'1. El receptor de estos recipientes considera como defectuosos todos aquellos cuya capacidad cae fuera del intervalo (9'90 ; 10'17).

¿ Que probabilidad tiene un recipiente de ser declarado defectuoso ?.

7º) La media de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es de 52 Kg y la desviación tipica de 4 Kg. Suponiendo que los pesos se ditribuyen normalmente, hallar cuantos estudiantes pesan :

a) Entre 46 Kg y 53 Kg

b) Más de 37 Kg

8º) Las puntuaciones de un ejercicio de biologia fueron 0 ; 1 ;.. ;10 dependiendo del número de respuestas correctas a 10 preguntas La puntuación media fue de 6'7 y la desviación tipica 1'2. Suponiendo que las puntuaciones se distribuyen normalmente, determinar.

a) El % de estudiantes que consiguio 6 puntos

¿? ⇒ b) La puntuación maxima del 10 % más bajo de la clase

c) La puntuación minima del 10 % superior de la clase

9º) Una confitura puede ser calificada de almibar si contiene entre 420 grs y 520 grs de azucar por kg de confitura. Un fabricante comprueba 200 botes de confitura de 1 kg, y encuentra que el peso medio de azucar es de 465 grs con una desviación tipica de 30 grs. Sabiendo que el contenido de azucar en un bote de confitura, se distribuye normalmente, calcular el % de la producción del fabricante que no debe llevar la mención "almibar" considerando la muestra representativa de la producción total.

10º) Sea D el número de viajeros que llegan a una estación en un vagon del metro, a una determinada hora. Se cuenta el número X de viajeros que entran, y el numero Y de viajeros que salen del vagon.

Las variables X ; Y ; D son variables aleatorias independientes que siguen respectivamente las siguientes distribuciones normales

$X - N(40 ; 9)$

$Y - N(30 ; 2)$

$D - N(100 ; 20)$

a) Indicar la distribución del número N de personas que el vagon contiene al salir de la estación.

b) Encontrar el número n tal que la probabilidad de que $0 \leq N \leq n$ sea 0'95

11º) Una máquina mecaniza ejes cuyo diametro se distribuye según una ley normal con párametros N (12 ; σ). Solo se admiten como buenos aquellos cuyos diametros estan comprendidos entre 12 y 12'5 siendo rechazados el 75 % , se pide :

a) Calcular su desviación tipica

b) Modificando los motores resultan admisibles en el intervalo (11'8 ; 12'7). ¿ Cual será el porcentaje de rechazo ?

12º) La media de los diametros interiores de las arandelas producidas por una máquina es de 0'502 pulgadas, y la desviación tipica 0'005 pulgadas. El propósito para el que se destinan estas arandelas, permite una tolerancia maxima en el diametro de 0'496 a 0'508 pulgadas, de otro modo las arandelas se consideran defectuosas. Determinar el % de arandelas defectuosas producidas por la máquina, suponiendo que dicha producción se distribuye normalmente.

13º) Hallar la probabilidad de obtener entre 3 y 6 caras inclusive en 10 lanzamientos de una moneda, utilizando :

a) La distibución binomial

b) La aproximación normal a la distribución binomial.

14º) Ajustar una distribución normal, a la distribución siguiente :

CLASES	FRECUENCIAS
inferior a 2'15	0
2'15 a 2'25	4
2'25 a 2'35	9
2'35 a 2'45	31
2'45 a 2'55	75
2'55 a 2'65	183
2'65 a 2'75	204
2'75 a 2'85	157
2'85 a 2'95	97
2'95 a 3'05	40
3'05 a 3'15	12
3'15 a 3'25	3
3,25 y superiores	0

15º) Un domador de leones, realiza un viaje a Africa con el fin de capturar 5 leones para su número. A su llegada se le plantean los siguientes problemas:

a) Para poder transportar los leones, le ofrecen tres vehículos, A, B y C; cada uno de los cuales puede transportar, 600 kg, 720 kg y 950 kg respectivamente.

Para elegir el vehículo, va a tener en cuenta, que sea el más ligero capaz de transportar la carga.

Sabiendo, que el peso de un león, sigue una distribución normal con media 110 kg y desviación típica 15 kg. ¿Qué vehículo debería elegir?.

b) La alimentación de los leones durante el viaje de vuelta, tiene que llevarse en paquetes especiales, para lo cual se dispone de una máquina empaquetadora, que empaqueta a un promedio de μ paquetes por hora. Se quiere que el número de cajas realmente empaquetadas, quede a uno de μ al menos el 75% de las veces. ¿ Cuál es el mayor valor de σ que se puede admitir, si deben cumplirse los objetivos marcados ?

SOLUCIONES:

1º) a) 0'8413 ; b) 0'5 ; c) 0'1319 ; d)0'1815

2º) a) -0'8 ; b) 1'4 ; c) 0 ; d) 57 ; 96 3º) μ=40 ; σ=60

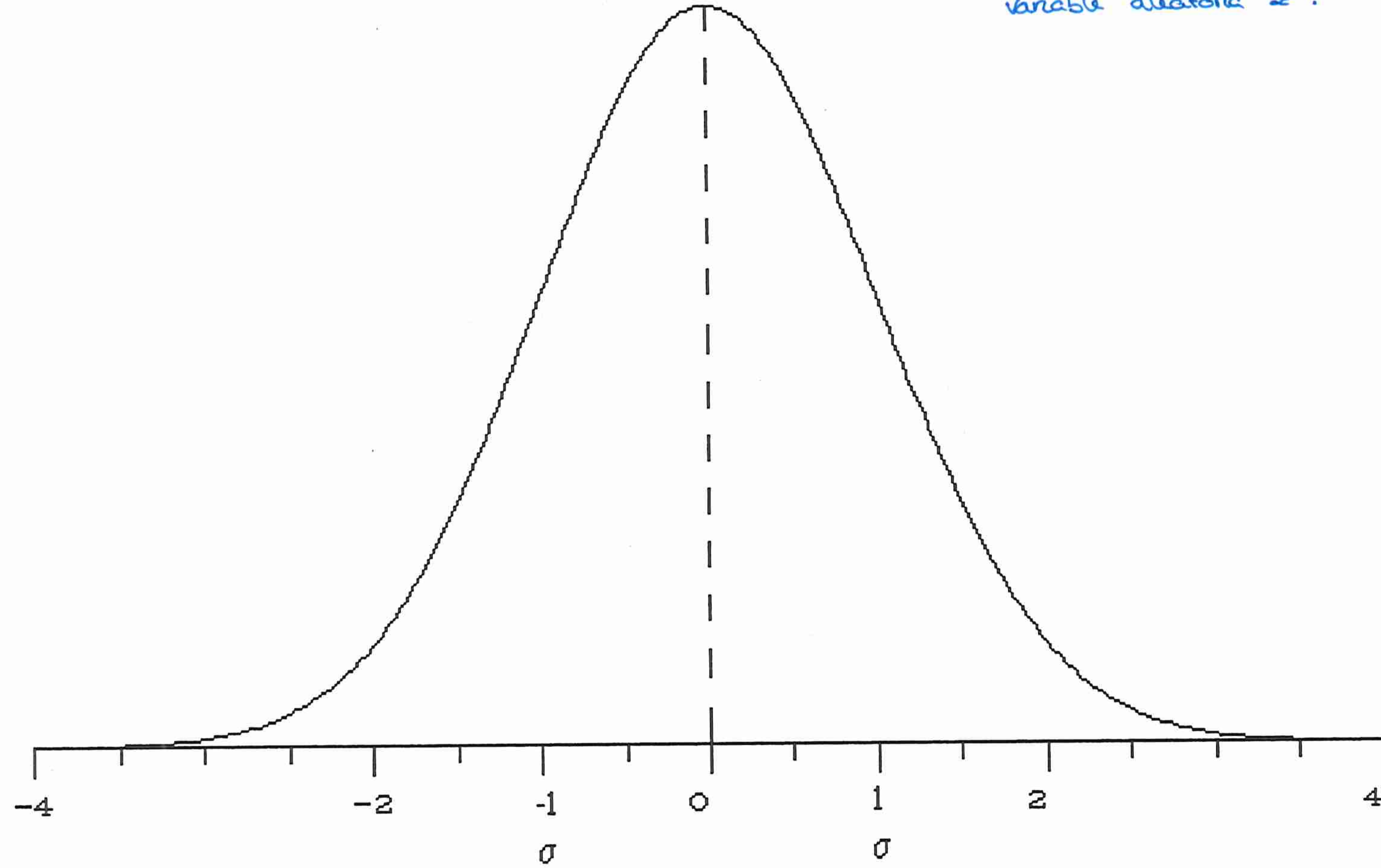
4º) a) 599 ; b) 106 ; c) 440 5º) a) 1'16 ; b) 1'09 ; c)1'69

6) 0'2033 7º) a) 266 ; b) 500 8º) a) 27'77% ; b) 4'6620 c)8,73

9º) 10'04% 10º) a) N (110; 22'02) ; b) 146

11º) a) 0'7412 ; b) 56'72 12º) 23'02 13º) a) 0'7735 b) 0'7719

14º) N (2,70 ; 0'16) 15º) a) B ; b) como máximo 0'5.



- simétrica
- media = 0

} la mediana tb. es cero: deja 2 partes iguales.

- hay un máx. en el pto. cero.

DISTRIBUCIÓN NORMAL STANDAR $N(0;1)$

Estamos ante un caso tal: v.a. * $- N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$.

* Función de densidad

$$f(x) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{para } -\infty < x < +\infty$$

* Función de distribución

$$F(x) = P[X \leq x_i] = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

* MEDIA

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0$$

* VARIANZA

$$VAR(x) = \sigma^2 = E[x - \bar{x}]^2 = E[x - 0]^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1$$

- Es simétrica.
- Tiene forma de campana de Gauss.
- $Me = 0$
- Desviación típica $= 1$

} Diferencias con otras distribuciones.

MEDIANA: Es un valor m tal que:

$$F(m) = P[X \leq m] = 1/2$$

como $F(-x) = 1 - F(x)$ entonces para $x = 0$

$F(0) = 1 - F(0)$ luego $2F(0) = 1$

$F(0) = 1/2$

Entonces la mediana $m = 0$

MODA: Valor M que maximiza la función de densidad

Para $x = 0$ hay un maximo

Luego $M = 0$

MANEJO DE TABLAS: CASOS QUE SE PUEDEN PRESENTAR

1er CASO: $P[Z < z]$

ejemplos ~~2~~ 1 y ~~6~~ 5

2º CASO: $P[Z > z]$

ejemplos 2 ~~3~~ y ~~7~~ 6.

3er CASO: $P[z_1 < Z < z_2]$

ejemplo ~~4~~ 3.

4º CASO: $P[z_1 > Z > z_2]$

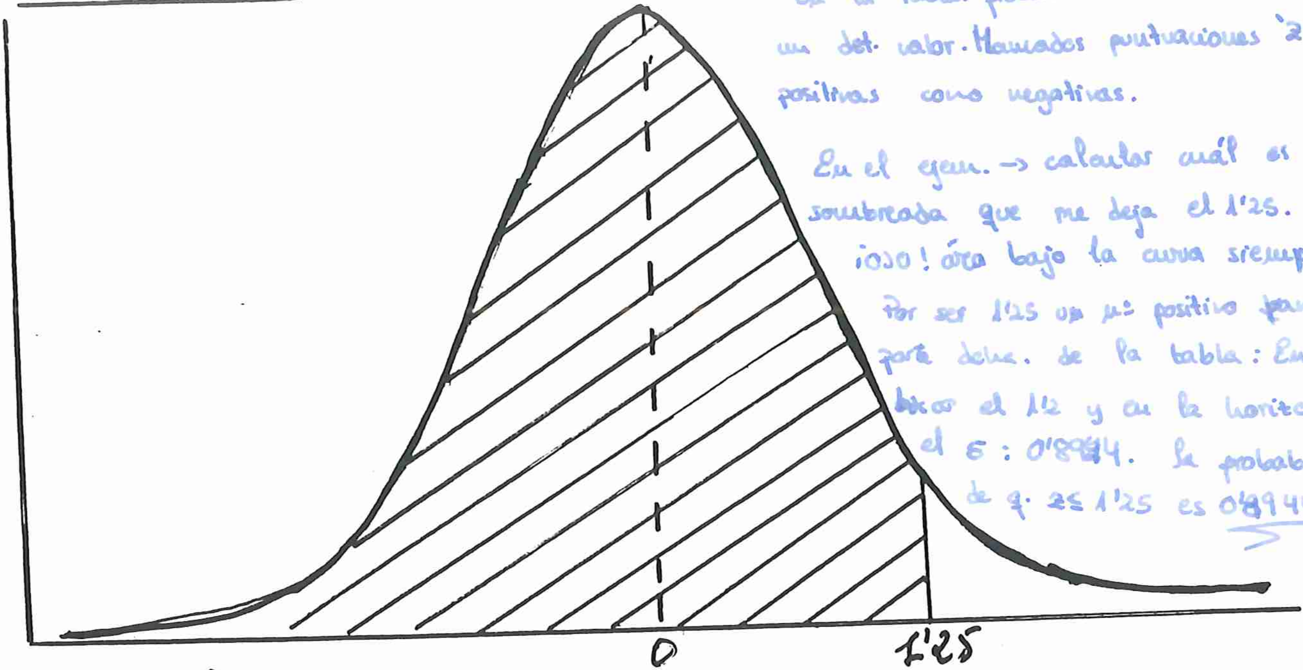
ejemplo ~~5~~ 4.

5º CASO: SE TRATA DE CALCULAR EL INTERVALO EN QUE SE ENCUENTRA Z Y QUE COMPRENDE UN PORCENTAJE SIMÉTRICAMENTE DISTRIBUIDO ALREDEDOR DE LA MEDIA

ejemplo ~~8~~ 7.

TABLA 12 — LOS CINCO CASOS QUE SE NOS PUEDEN PRESENTAR EN LAS TABLAS

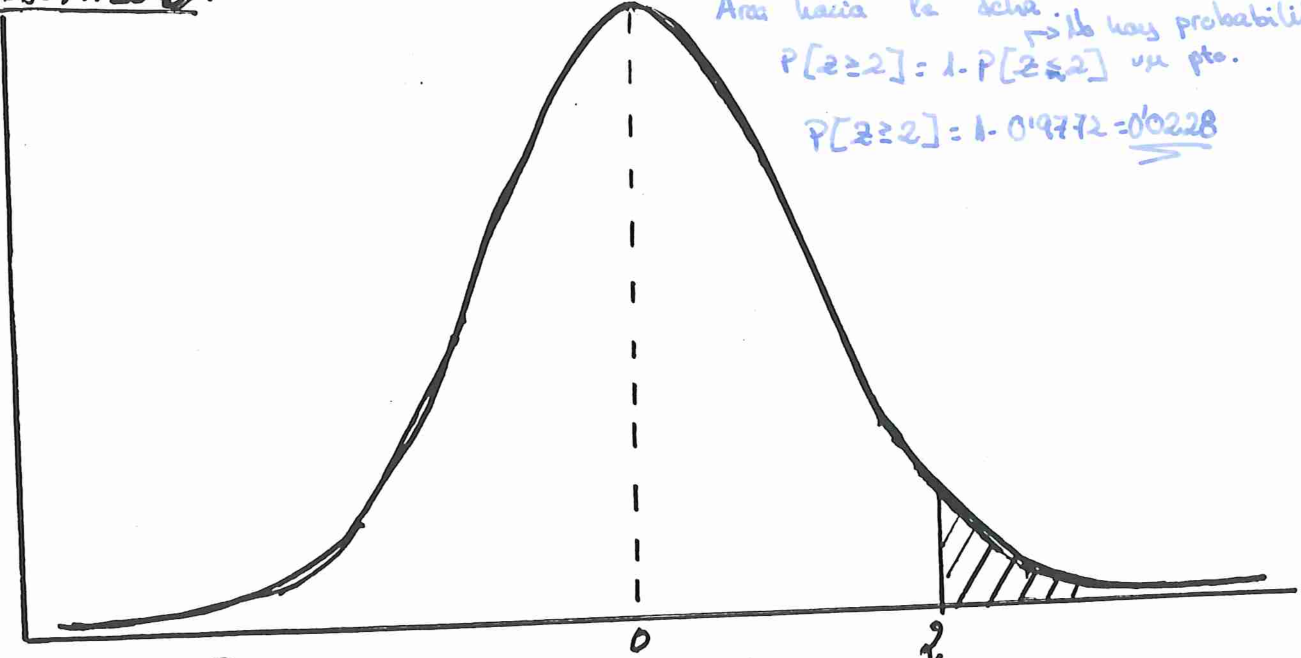
EJEMPLO 1



En la tabla: probabilidades hacia la izq. de un det. valor. Llamados puntuaciones "z", tanto positivas como negativas.

En el ejem. → calcular cuál es el área sombreada que me deja el 1'25.
¡ojo! área bajo la curva siempre "1".
Por ser 1'25 un nº positivo vamos a la parte dcha. de la tabla: En la vertical busco el 1'2 y en la horizontal hasta el 5: 0'8944. La probabilidad de q. $z \leq 1'25$ es 0'8944.

EJEMPLO 2:

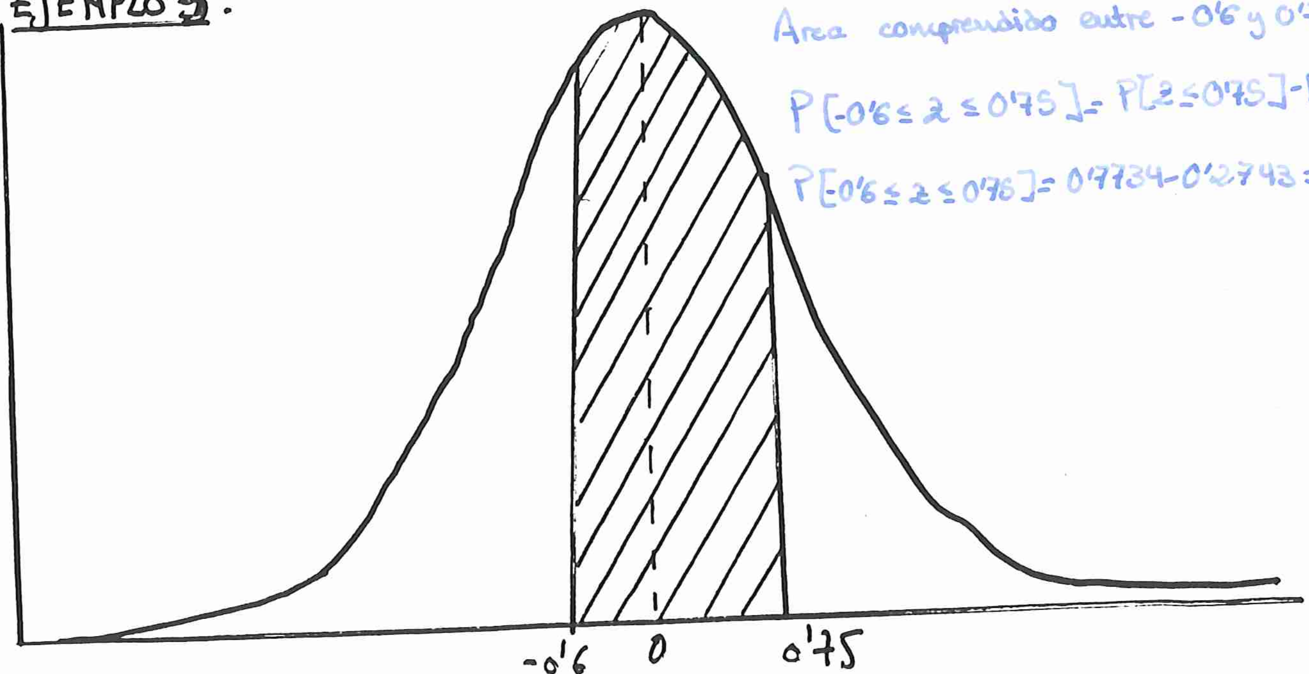


Area hacia la dcha. → No hay probabilidad en un pto.

$P[z \geq 2] = 1 - P[z \leq 2]$

$P[z \geq 2] = 1 - 0'9772 = 0'0228$

EJEMPLO 3:

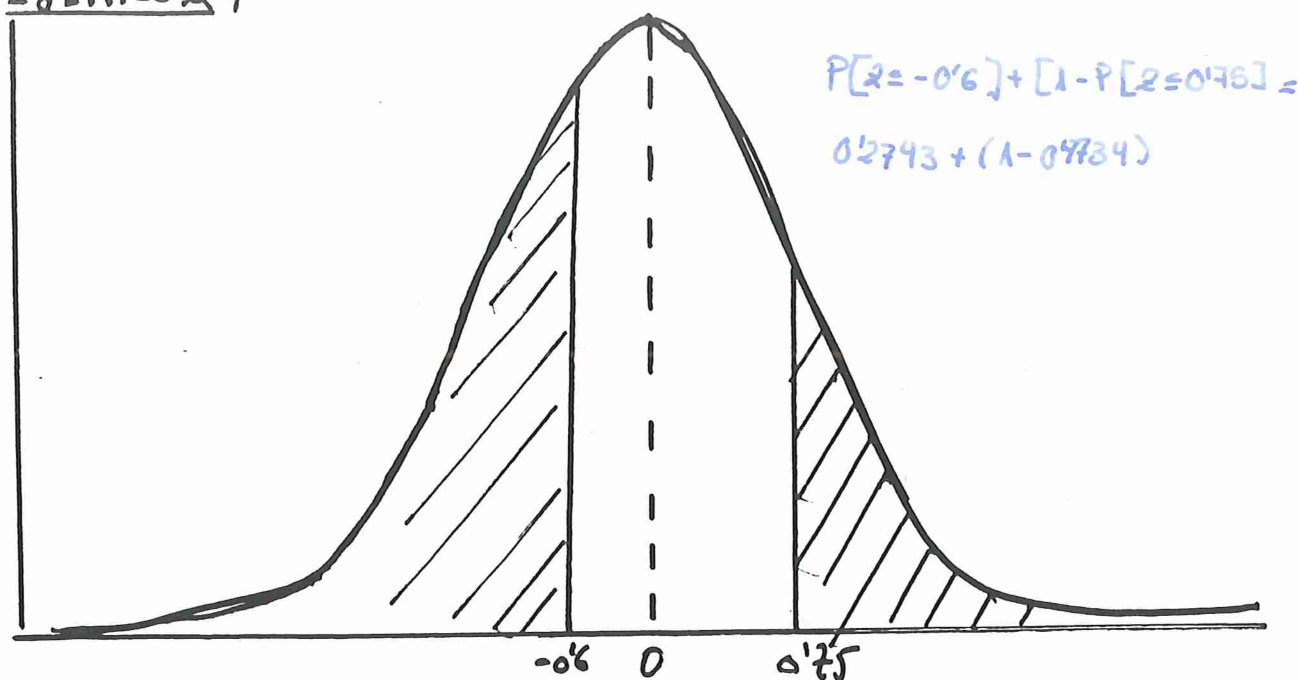


Area comprendida entre -0'6 y 0'75.

$P[-0'6 \leq z \leq 0'75] = P[z \leq 0'75] - P[z \leq -0'…$

$P[-0'6 \leq z \leq 0'75] = 0'7734 - 0'2743 = 0'49 9…$

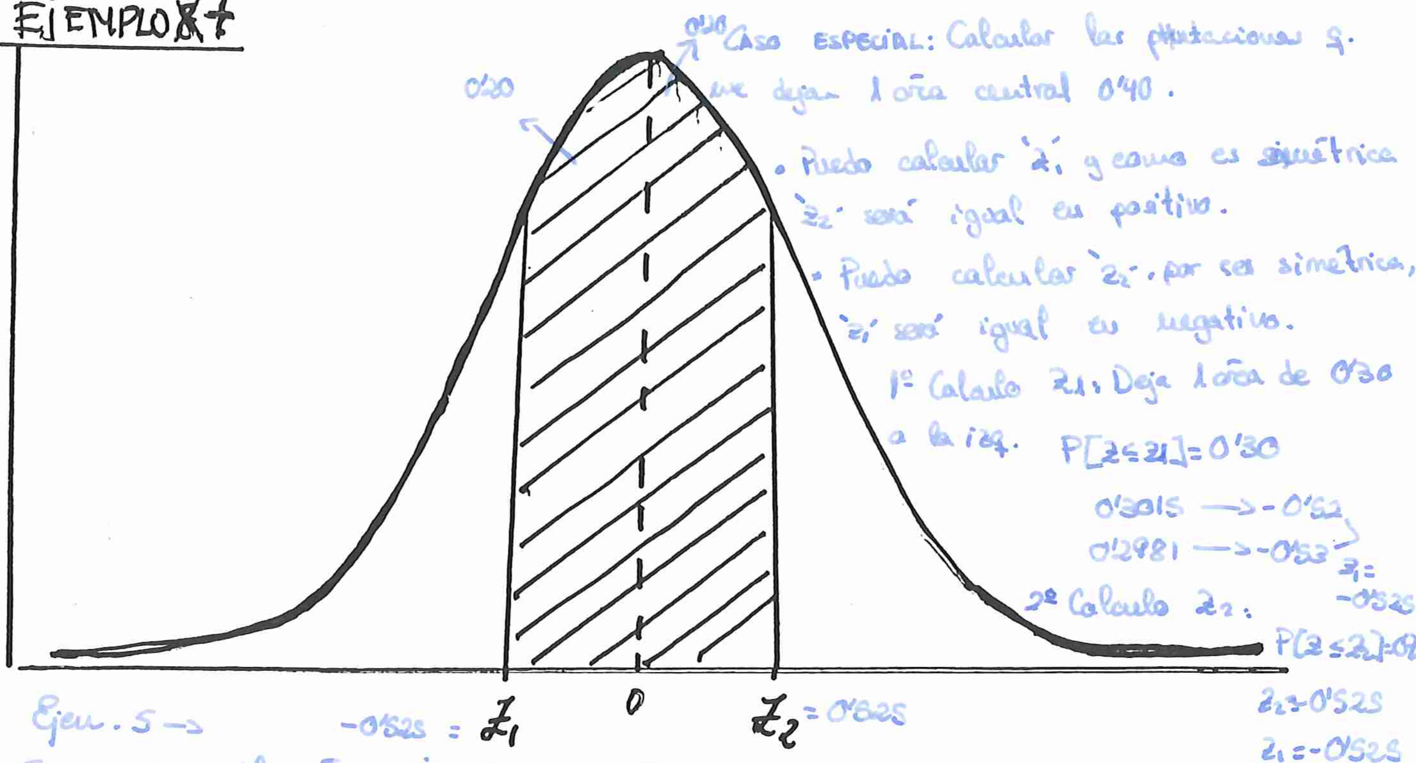
EJEMPLO 4



$P[z \le -0'6] + [1 - P[z \le 0'75]] =$

$0'2743 + (1 - 0'7734)$

EJEMPLO 7



CASO ESPECIAL: Calcular las puntuaciones q. me dejan 1 área central 0'40.

- Puedo calcular 'z_1' y como es simétrica 'z_2' será igual en positivo.
- Puedo calcular 'z_2', por ser simétrica, 'z_1' será igual en negativo.

1º Calculo z_1: Deja 1 área de 0'30 a la izq. $P[z \le z_1] = 0'30$

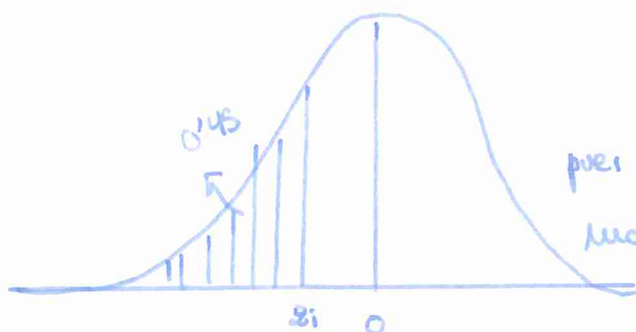
0'3015 → -0'52
0'2981 → -0'53 } $z_1 = -0'525$

2º Calculo z_2: $P[z \le z_2] = 0'$[illegible]

$z_2 = 0'525$
$z_1 = -0'525$

Ejem. 5 → $-0'525 = Z_1$ 0 $Z_2 = 0'525$

Si me dan el área, ¿cuáles son las puntuaciones?



$P[z \le z_i] = 0'45$

Vas a la parte de la izq. de la tabla pues es negativo (se encuentra a la izq). Buscamos el 0'45 en probabilidades, no lo encontramos. Buscamos su anterior y su posterior:

0'4483 → -0'13
0'4522 → -0'12 } Por Aprox. -0'125

sigma

DISTRIBUCIÓN NORMAL GENERAL : $N(\mu;\sigma)$

v.a. $X \sim N(\mu;\sigma)$

ESTA RELACIONADA CON v.a. $Z \sim N(0;1)$

MEDIANTE LA SIGUIENTE EXPRESIÓN:

$$* \; X = \sigma \cdot Z + \mu \qquad \sigma > 0 \text{ IMP.}$$

* FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN:

$$F(x) = P[X \leq x] = P[\sigma Z + \mu \leq x] = P\left[Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right]$$

COMO $Z \sim N(0;1)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} du = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

* FUNCIÓN DE DENSIDAD:

$$f(x) = F'\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sigma} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

* MEDIA:

$$E(x) = E[\sigma Z + \mu] = \sigma E[Z] + \mu = \mu$$

PUESTO QUE $E[Z] = 0$ PUES $Z \sim N(0;1)$

VARIANZA

$$VAR(x) = E\left[(x-\mu)^2\right] = E\left[(\sigma z + \mu - \mu)^2\right] =$$

$$= E\left[(\sigma z)^2\right] = \sigma^2 E\left[z^2\right]$$

Como $E\left[z^2\right] = 1$ $\quad VAR(x) = \sigma^2$

REPRESENTACIÓN GRAFICA DE $f(x)$

* LA RECTA $x = \mu$ SERIA EL EJE DE SIMETRIA

* ASINTOTAS: $x \to \infty \quad f(x) \to 0$

  $x \to -\infty \quad f(x) \to 0$

* CRECIENTE CUANDO $x < \mu$

  DECRECIENTE CUANDO $x > \mu$

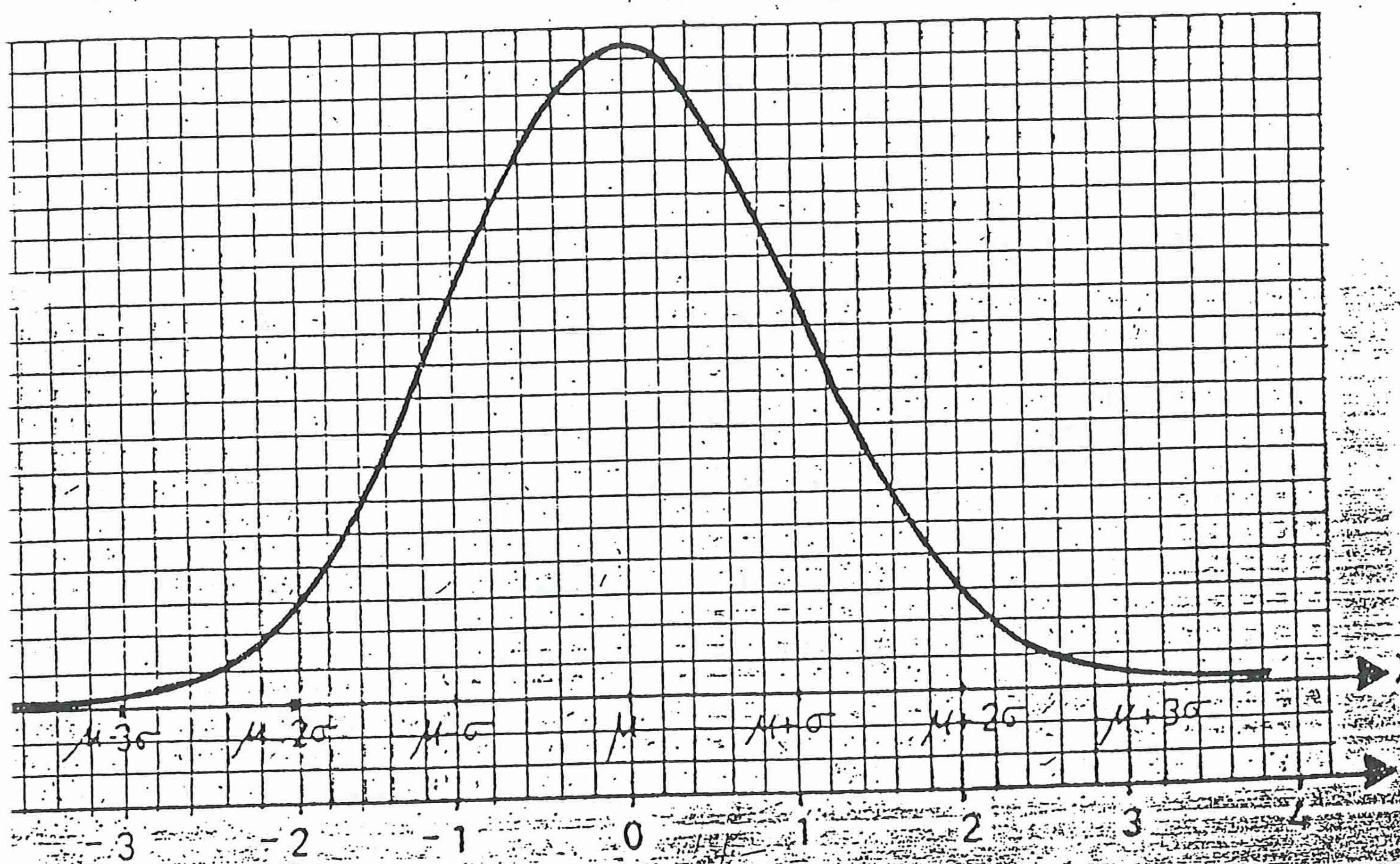
* HAY UN MAXIMO PARA $x = \mu$

* PUNTOS DE INFLEXION EN $x - \sigma$; $x + \sigma$

PARA PASAR DE UNA VARIABLE "X" A UNA VARIABLE "Z" ES PRECISO EFECTUAR LA TRANSFORMACION = TIPIFICAR

DESTIPIFICAR -> paso de puntuaciones 'Z' a puntuaciones 'X'.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \longrightarrow X = \mu + Z\sigma$$



Eje de simetría parte del valor "μ"

Diferencia en la dispersión: la campana podrá ser más abierta o más cerrada.

APROXIMACIONES MEDIANTE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

* $X \sim B(n;p)$ v.a x que sigue l distribución binomial.

Si: condiciones que se han de cumplir:

1°) $np \geq 5$

2°) $n(1-p) \geq 5$

↓

$Z \sim N(0;1)$ SIENDO $Z \cong \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ ⇐ Para TIPIFICAR

(media: np; desviación típica: $\sqrt{np(1-p)}$)

* $X \sim H(M;N;n)$ v.a. x q. sigue l distribución hipergeométrica.

Si: condiciones a cumplir

1°) $np \geq 5$

2°) $n(1-p) \geq 5$

↓

$Z \sim N(0;1)$ SIENDO $Z \cong \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}}$ Para TIPIFICAR

(media: np; desviación típica: $\sqrt{np(1-p)}$; factor corrector pa- poblaciones finitas: $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$)

Si $n < 0'05N$ SE PUEDE PASAR POR ALTO EL FACTOR CORRECTOR ⇒ estaríamos ante una BINOMIAL.

* $X \sim P(\lambda)$ v.a. X q sigue l distribución de Poisson.

Si : condición $\mu = \lambda > 5$

$Z \sim N(0;1)$ SIENDO $Z \cong \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ Para TIPIFICAR

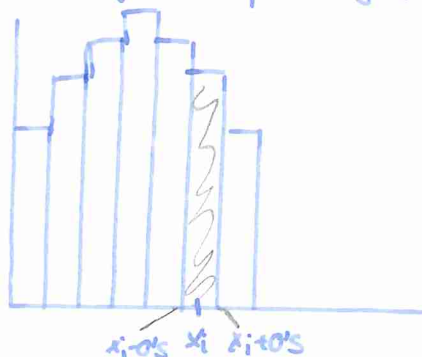
* CORRECCIÓN POR CONTINUIDAD

$$Z \cong \frac{(X-np) \pm 0'5}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$Z \cong \frac{(X-np) \pm 0'5}{\sqrt{np(1-p)}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

$$Z \cong \frac{(X-\lambda) \pm 0'5}{\sqrt{\lambda}}$$

Si yo dibujo l gráfico de l distribución binomial, aproxi.:



Pa' transformar "x_i" en un intervalo le sumo y resto media unidad de medida:

Y calculo el área

$P[X = x_i] = P[x_i - 0'5 \leq x_i \leq x_i + 0'5]$

Si yo quiero calcular: $P[X \geq x_i]$ ó $P[X \leq x_i]$ } Necesito el factor corrector ⟹